

Determinarea constantei elastice a unui resort

Scopul lucrării:

Determinarea constantei elastice a unor resorturi prin două metode diferite: metoda statică și metoda dinamică.

I. Considerații teoretice

I.1. Metoda statică

Considerăm un resort de lungime inițială l_0 , constantă elastică k și masă neglijabilă, fixat la un capăt (Fig. 1a). Dacă la capătul inferior al resortului se atâră un corp de masă M , atunci sub acțiunea forței de greutate, $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$, resortul se alungește cu Δl (Fig. 1b).

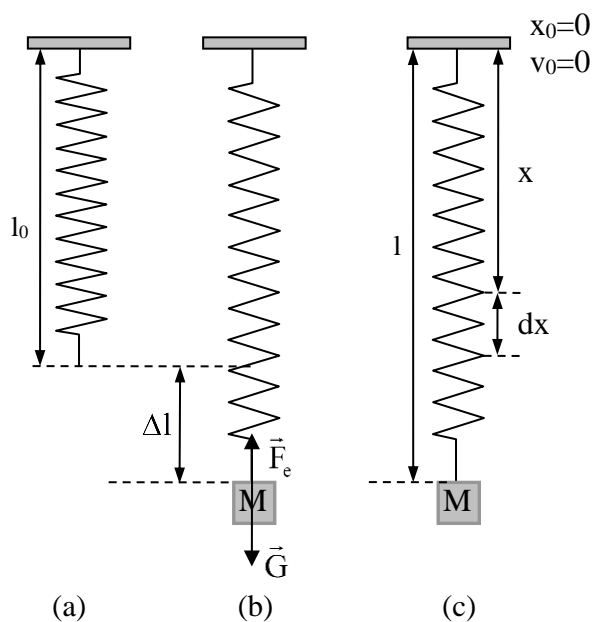


Fig. 1.

Sub acțiunea acestei greutatei resortul se alungește până își atinge poziția de echilibru, atunci când, forța de greutate este compensată de forța elastică $\vec{F}_e = -k \cdot \Delta \vec{l}$, adică:

$$\vec{G} = \vec{F}_e \quad \text{sau} \quad M \cdot g = k \cdot \Delta l \quad (1)$$

de unde se obține constanta elastică a resortului:

$$k = \frac{M \cdot g}{\Delta l} \quad (2)$$

unde g este accelerația gravitațională, $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

I.2. Metoda dinamică

Scoatem sistemul, format din resort și corp, din poziția de echilibru, alungind resortul cu x_0 și apoi îl lășăm liber. Dacă neglijăm forța de rezistență din partea mediului, sub acțiunea forței elastice, $F_e = -k \cdot x$ sistemul va oscila liber cu amplitudinea A . Scriind legea a doua a dinamicii, se obține ecuația de mișcare a sistemului:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + k \cdot x = 0 \quad (3)$$

Împărțind ecuația (3) cu M și notând:

$$\frac{k}{M} = \omega_0^2 \quad (4)$$

se obține :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0 \quad (5)$$

unde ω_0 se numește pulsația proprie a sistemului. Soluția ecuației (5) este:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (6)$$

Constanta elastică, în metoda dinamică, se obține din relația (4):

$$k = M \cdot \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot M \quad (7)$$

unde am folosit relația dintre perioada de oscilație, T și pulsația proprie a sistemului:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (8)$$

Dacă masa resortului, m, nu este neglijabilă, trebuie luată în considerare contribuția ei la perioada oscilațiilor. Considerăm că masa resortului este uniform distribuită de-a lungul lungimii sale, astfel încât masa unui element de lungime dx, aflat la distanța x de punctul de susținere (Fig. 1c) este:

$$dm = \mu \cdot dx = \frac{m}{l} \cdot dx \quad (9)$$

unde $\mu = \frac{m}{l}$ este densitatea liniară de masă.

Dacă presupunem o variație liniară a vitezei de oscilație a resortului, de la $v_0 = 0$ (capătul fix al resortului este în repaus) până la $v_{\max} = v$ (viteza capătului liber, considerată la trecerea prin poziția de echilibru, atunci viteza elementului dx, aflat la distanța x de capătul fix al resortului, este:

$$v_x = \frac{v}{l} \cdot x \quad (10)$$

Energia cinetică a elementului de masă dm este:

$$dE_c = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{l^3} \cdot v^2 \cdot x^2 \cdot dx \quad (11)$$

Energia cinetică a întregului resort se calculează prin integrare:

$$E_c^{\text{resort}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{l^3} \cdot v^2 \cdot \int_0^l x^2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3} \cdot v^2 \quad (12)$$

Energia cinetică totală maximă a întregului sistem (resort plus corpul de masă M) este:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \left(M + \frac{m}{3} \right) \cdot v^2 \quad (13)$$

Pentru un oscilator armonic energia potențială maximă este:

$$E_p = \frac{kA^2}{2} \quad (14)$$

Deoarece în cazul unui oscilator armonic avem o transformare periodică a energiei potențiale în energie cinetică, și invers, astfel încât energia totală a oscilatorului armonic este constantă, atunci energia cinetică maximă este egală cu energia potențială maximă. Egalând relația (13) cu relația (14), se obține constanta elastică a resortului prin metoda dinamică:

$$k = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \left(M + \frac{m}{3} \right) \quad (15)$$

deoarece cu v am notat viteza maximă a oscilatorului: $v = v_{\max} = A \cdot \omega$, iar $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

II. Metodica experimentală

II.1. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental constă dintr-un stativ pe care sunt fixate resorturile, ale căror constantă elastică urmează să fie determinată (Fig. 2). Pentru alungirea acestor resorturi se vor utiliza 3 greutăți marcate. Alungirea resortului sub influența diferitelor greutăți, se va măsura cu o riglă verticală ce permite măsurarea lungimii cu o precizie de 1 mm. În cazul metodei dinamice timpul se va măsura cu un cronometru electronic.

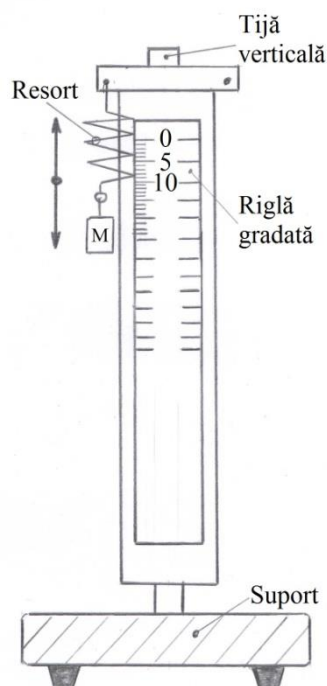


Fig. 2.

II.2. Modul de lucru

II.2.1. Metoda statică

- i. Se măsoară lungimea l_0 a resortului nedeformat;
- ii. Se atârână pe rând masele M_1, M_2 , etc. și se măsoară de fiecare dată lungimile l_1, l_2 , etc. ale resortului deformat;
- iii. Se determină de fiecare dată alungirea resortului $\Delta l_1 = l_1 - l_0$, $\Delta l_2 = l_2 - l_0$, etc.;
- iv. Datele obținute se trec în tabelul 1.

Tabelul 1.

m (g)	M (g)	Δl (mm)	k (N/m)	\bar{k} (N/m)	$\Delta k/k$ (%)	Δk (N/m)	$\overline{\Delta k}$ (N/m)

II.2.2. Metoda dinamică

- i. Se atârână de resort o greutate marcată și se stabilește poziția de echilibru (repaus) a oscilatorului;
- ii. Provoacănd o alungire inițială de 2-3 cm se pune în oscilație sistemul format din greutatea marcată și resort;
- iii. Se cronometrează durata t în care sistemul efectuează un număr $n = 20$ de oscilații complete, și se determină perioada de oscilație cu ajutorul relației $T = t/n$;
- iv. Se repetă operațiile pentru trei corpuri marcate;
- v. Datele obținute se trec în tabelul 2.

Tabelul 2.

m (g)	M (g)	M+m/3 (kg)	t (s)	T (s)	k (N/m)	\bar{k} (N/m)	$\Delta k/k$ (%)	Δk (N/m)	$\Delta \bar{k}$ (N/m)

II.3. Prelucrarea datelor experimentale

II.3.1. Metoda statică

- i. Se calculează constanta elastică cu relația (2);
- ii. Se calculează:

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad (16)$$

- iii. Eroarea relativă se calculează cu relația:

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l} \quad (17)$$

- iv. Se calculează cu relația: $\Delta k = a \cdot k$, deoarece $\frac{\Delta k}{k} = a$;

- v. Se calculează:

$$\Delta \bar{k} = \frac{\Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_3}{3} \quad (18)$$

- vi. Rezultatele obținute se trec în tabelul 1;

- vii. Rezultatul final se scrie sub forma:

$$k = \bar{k} \pm \Delta \bar{k} \text{ (N/m)} \quad (19)$$

II.3.2. Metoda dinamică

- i. Se calculează constanta elastică cu relația (15);

- ii. Se calculează:

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2 + k_3}{3} \quad (20)$$

- iii. Eroarea relativă se calculează cu relația:

$$\frac{\Delta k}{k} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta M + \Delta \left(\frac{m}{3} \right)}{M + \frac{m}{3}} \quad (21)$$

unde:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta n}{n} \quad (22)$$

iv. Se calculează cu relația: $\Delta k = a \cdot k$, deoarece $\frac{\Delta k}{k} = a$;

v. Se calculează:

$$\overline{\Delta k} = \frac{\Delta k_1 + \Delta k_2 + \Delta k_3}{3} \quad (23)$$

vi. Rezultatele obținute se trec în tabelul 2;

vii. Rezultatul final se scrie sub forma:

$$\overline{k} = \overline{k} \pm \overline{\Delta k} \text{ (N/m)} \quad (24)$$